MECANIQUE

Secondaire (S, STI, STL)

➢ **Quelques définitions**

Cinématique : partie de la mécanique qui étudie les mouvements des solides sans se préoccuper de leurs causes, les forces.

Système : constitué par l'objet ou l'ensemble des objets que l'on a choisi d'étudier.

Système indéformable : lorsque la distance entre deux points quelconques de ce système reste constante. Il est appelé solide.

Référentiel : ensemble rigide de points fixes pour l'observateur, associé à une horloge. On peut définir un référentiel par la donnée d'un point origine et trois directions fixes par rapport à l'ensemble rigide de points.

Référentiel de Copernic : L'origine est le centre d'inertie du système solaire, les trois axes passent par trois étoiles fixes choisies de façon que deux axes soient dans le plan de l'Ecliptique, le troisième étant perpendiculaire à ce plan.

Référentiel héliocentrique : l'origine est le centre du soleil.

Référentiel géocentrique : défini par le centre de masse de la Terre comme origine et les trois directions fixes sont les mêmes que celles du référentiel héliocentrique.
Remarque : Le référentiel géocentrique est en translation circulaire dans le référentiel héliocentrique.

Référentiel Galiléen : référentiel dans lequel le principe de l'inertie est vérifié ($1^{ère}$ loi de Newton).
Le référentiel géocentrique n'est pas galiléen, mais si le système étudié évolue pendant une durée très brève par rapport à la durée de révolution de la Terre autour du Soleil (365,25 jours), alors, il peut être considéré comme galiléen.

Repère d'espace : repère lié au référentiel qui va permettre de définir avec précision les coordonnées d'un point du solide étudié.

Repère de temps : défini par

- un évènement origine choisi arbitrairement (instant où le phénomène commence, par exemple)
- une unité de durée. Dans le système international, cette unité est la seconde.

Trajectoire : ensemble des positions prises par un point du solide au cours du temps.

Solide en translation : la direction de l'un de ses segments quelconque est invariante au cours du temps ; tous les points du solide ont à chaque instant le même vecteur vitesse.

Mouvement uniforme : les positions successives sont régulièrement espacées : la vitesse v est constante.

Mouvement varié : les positions successives ne sont pas régulièrement espacées : la vitesse v n'est pas constante.

Actions intérieures : intéractions entre deux parties du système.

Actions extérieures : actions mécaniques qu'exerce chaque composant du milieu extérieur sur le système. On retrouve les actions à distance (actions électrostatiques, magnétiques et gravitationnelles) et les actions de contact (elles nécessitent des points communs entre le système et le milieu extérieur). Une action mécanique peut mettre en mouvement un objet ou modifier son mouvement, ou déformer un objet.

Inertie : résistance à un changement du mouvement d'un objet. L'inertie est proportionnelle à la masse de l'objet.

➢ Lois de Newton (1642 – 1727)

1ère loi : Principe de l'inertie

Dans un référentiel Galiléen, lorsqu'un solide est isolé ou pseudo-isolé ($\sum \vec{F} = \vec{0}$), son centre d'inertie G est :

- soit au repos, si G est initialement immobile
- soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme (vecteur vitesse constant)

Théorème du centre d'inertie

Dans un référentiel Galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse du solide par l'accélération de son centre d'inertie G : $\sum \vec{F} = m\overrightarrow{a_G}$

2ème loi : relation fondamentale de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces appliquées à un point matériel est égale au produit de la masse de ce point matériel par son accélération : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

3ème loi : principe d'intéraction

Lorsqu'un corps (1) exerce sur un corps (2) une action mécanique par une force $\vec{F}_{1\to 2}$ localisée en B, le corps (2) exerce sur le corps (1) une action mécanique représentée par une force $\vec{F}_{2\to 1}$ localisée en A.

Ces deux forces ont le même support, la droite (AB), et sont telles que $\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$

➢ Actions mécaniques

Poids d'un corps : le poids d'un corps (ou force de pesanteur) est la force exercée sur un corps (de masse m) immobile dans le référentiel terrestre, par l'attraction universelle des autres masses et les forces inertielles. Quelque soit le corps, on aura $\vec{P} = m\vec{g}$ ou encore P = mg. $\vec{g}$ est appelé vecteur champ de pesanteur, son module g est appelé intensité de pesanteur et varie avec l'altitude et la latitude (g = 9,89N/kg aux pôles, 9,78N/kg à l'équateur et 9,81N/kg à Paris). On peut considérer que g est constant jusqu'à une altitude 10km.

Travail d'une force : le travail $W_{AB}(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$ au cours du déplacement AB est le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$: $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$. Lorsque l'angle entre les deux vecteurs est aigu, le travail est dit **moteur** tandis que lorsque l'angle est obtus, le travail est dit **résistif**. Dans le cas d'un angle droit, le travail est **nul**.

Force conservative : lorsque le travail qu'elle effectue au cours du déplacement AB ne dépend pas du chemin parcouru, mais uniquement de la position initiale A et finale B.

Puissance moyenne : $P_m = \frac{W}{\Delta t}$, avec P en Watt, W en Joules et t en secondes.

Puissance instantanée : la puissance garde rarement une valeur constante au cours du temps, il faut donc définir la puissance instantanée : $P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F}.\vec{dl}}{dt}$ or $\vec{v} = \frac{\vec{dl}}{dt}$ on obtient donc $\boxed{P = \vec{F}.\vec{v} = F.v.\cos(\vec{F},\vec{v})}$

Relation entre P et W : $P = \frac{W}{\Delta t}$

➢ Chute libre

On étudie la chute libre d'un système quelconque (une bille par exemple). On entend par chute libre, un mouvement pour lequel la seule force qui intervient est le poids du système.
La vitesse de la bille est de la forme : **v = gt** avec g l'intensité de la pesanteur et t le temps de chute (en seconde).
De même, la position de l'objet s'écrit sous la forme $\boxed{x = \frac{1}{2}gt^2}$

On peut remarquer que la vitesse de l'objet ou sa position ne dépendent que de l'intensité de la pesanteur.
➔ **La vitesse d'un objet en chute libre ne dépend pas de sa masse.**

L'objet acquiert une énergie, dite énergie cinétique, de la forme $\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$ avec Ec en J, m en kg et v en m/s

➢ Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique d'un système quelconque entre deux instants est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces agissant sur le système entre ces deux instants
Soit : $\boxed{Ec_1 - Ec_2 = \Delta Ec = \sum W_{1,2}(\vec{F})}$

Si le système est un solide (indéformable), on ne tient compte que des forces extérieures.

➢ Solide en rotation autour d'un axe fixe

Par définition, un solide est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe lorsque tous ses points décrivent des cercles ou des portions de cercles centrés sur la même droite Δ, appelée axe de rotation.

Pour repérer le point, on peut utiliser l'abscisse curviligne (c'est la mesure algébrique s de l'arc de cercle, elle s'exprime en unité de longueur) ou l'abscisse angulaire (c'est la valeur algébrique θ de l'angle orienté)
La relation entre les deux est : s = r.θ, avec s et r (rayon du cercle) en mètre et θ en radian

Le solide étant indéformable, tous les points du solide en rotation autour de l'axe Δ, tournent d'un même angle dθ pendant la même durée dt. Ils ont tous la même vitesse angulaire, appelée **vitesse angulaire du solide**, donnée par la formule $\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$. ω est exprimée en rad/s.

De même on définit la vitesse linéaire v par : $\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$ avec v en m/s.

On obtient ainsi la relation entre la vitesse angulaire et la vitesse linéaire : v = R.ω

Dans le cas d'une rotation uniforme, on va pouvoir définir la période de rotation comme : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$
T, la période en seconde, est la durée pour effectuer un tour.

De même on peut exprimer la fréquence, en hertz (Hz), comme étant l'inverse de la période, et comme étant le nombre de tours effectués en une seconde. Ainsi on a : $\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$

Moment d'une force

Par expérience, nous savons que toute force appliquée à un solide en rotation ne peut produire un mouvement. Pour cela, on introduit une grandeur appelée moment d'une force par rapport à l'axe Δ et noté $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$. Le moment d'une force détermine la capacité d'une force à mettre en rotation un solide, il s'exprime en N.m.

On notera $\boxed{\left|\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\right| = F.d}$ si la force est orthogonale à l'axe Δ, c'est-à-dire contenue dans le plan perpendiculaire à l'axe. d est la distance à l'axe, le segment d est à la fois perpendiculaire à la force et à Δ.

Remarques :
- Une force parallèle à l'axe a un moment nul
- Une force dont le support rencontre l'axe à un moment nul (d=0)

Moment d'un couple de forces

Les actions responsables de la rotation autour d'un axe d'un solide sont des couples.
Un couple de force noté $C = (\vec{F}, \vec{F'})$ est l'ensemble de deux forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$, non colinéaires, de même direction, de sens opposé, de même module. Le moment du couple est, suivant son effet, une valeur algébrique : $\mathcal{M}(C) = \pm Fd$ avec d la distance séparant les deux points d'application des forces.

Travail d'une force appliquée à un solide en rotation

Par définition, $W = \mathcal{M}.\theta$

Puissance d'un couple

Par définition, $P = \frac{\delta W}{dt} = \mathcal{M}.\frac{d\theta}{dt}$ d'où : $P = \mathcal{M}.\omega$ La puissance instantanée d'un couple de moment $\mathcal{M}$ est égale au produit de ce moment par la vitesse angulaire ω du solide auquel il s'applique.

- **Energie cinétique pour un solide en rotation**

Soit le solide en rotation autour de l'axe fixe Δ, l'énergie cinétique E_c du solide est la somme des énergies cinétiques de chacun de ses points qui ont des vitesses linéaires v différentes : $Ec = \sum Ec_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$

or v = rω, d'où : $Ec = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^{2\,2}$ soit $\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$ J_Δ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe, il exprime la manière dont est répartie la matière autour de l'axe de rotation, sa valeur ne dépend pas du type de mouvement. Son unité est le kg.m².

Moment d'inertie de quelques solides :

- cylindre vide, $J_\Delta = Mr^2$
- cylindre plein, $J_\Delta = \frac{1}{2}Mr^2$
- sphère pleine, $J_\Delta = \frac{2}{5}Mr^2$
- tige de longueur l, $J_\Delta = \frac{1}{12}Ml^2$

- **<u>Comparaison entre la translation rectiligne et la rotation autour d'un axe fixe</u>**

	Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
Vitesse	Vitesse linéaire $v = \frac{dl}{dt}$, (m/s)	Vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, (rad/s)
Efficacité de l'action caractérisée par	Force $\vec{F}$ en N	Moment par rapport à l'axe $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$, (N.m)
Inertie du solide	Masse M (kg)	Moment d'inertie J_Δ (kg/m²)
Travail	W = F.dl (J)	$W = \mathcal{M}.d\theta$ (J)
Puissance	P = F.v (W)	$P = \mathcal{M}.\omega$ (W)
Energie cinétique du solide	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (J)	$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$ (J)
Théorème de l'énergie cinétique	$\Delta Ec = \sum W_{1,2}(\overrightarrow{F_{ext}})$	$\Delta Ec = \sum W(\overrightarrow{F_{ext}} + \text{couples})$

- **<u>Energie potentielle de pesanteur</u>**

Le travail que peut fournir un corps S en tombant est d'autant plus important que sa distance par rapport à la Terre est grande. Ce travail, positif, correspond à une quantité d'énergie puisée dans le système corps-Terre. Plus le corps se rapproche de la Terre, plus l'énergie du système diminue.
Cette énergie en réserve est nommée énergie potentielle. Elle puise sa forme dans l'existence de la force de pesanteur, elle est donc qualifiée d'<u>énergie potentielle de pesanteur</u>.

Le travail du poids correspond donc à la diminution de l'énergie potentielle, ce qui permet d'écrire :
$\Delta Ep = Ep_2 - Ep_1 = mg(z_2 - z_1)$

<u>Remarque</u> : la variation d'énergie potentielle est l'opposé d'un travail. Elle d'exprime en Joules.

➢ Energie mécanique

L'énergie mécanique totale E d'un solide est, à chaque instant, dans un repère donné, la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle : E = Ec + Ep soit $\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz}$

Dans le cas de la chute libre, à chaque instant, on a :

$$\Delta Ec = Ec_2 - Ec_1 = \sum W_{1,2}(\vec{F})$$

Or la seule force en présence est le poids : $W(\vec{P}) = \Delta Ep = mg(z_1 - z_2) = -mg(z_2 - z_1)$

D'où : $\Delta Ec = -\Delta Ep$

Cela signifie qu'au cours de la chute, il y a conservation de l'énergie mécanique : tout au long de la chute, l'énergie potentielle est transformée dans son intégralité en énergie cinétique.

Par définition, l'énergie totale d'un solide qui n'est soumis qu'à des forces conservative, se conserve.

Remarque : les forces de frottement, entre autres, sont non conservatives.

➢ Non conservation de l'énergie mécanique : système non isolé

L'énergie mécanique d'un système isolé non conservatif diminue. La variation de son énergie mécanique entre deux instants, est égale à la somme des travaux des forces intérieures de frottement : $\Delta E = W_{frottements}$
Cette diminution de l'énergie mécanique, due à des forces de frottements, s'accompagne d'une production plus ou moins visible de chaleur : on dit qu'il apparaît de l'énergie thermique.

➢ Dynamique du point matériel

Pour un point matériel M, de masse m, animé d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel R donné, on définit les grandeurs cinétiques suivantes :

- La quantité de mouvement : $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$
- Le moment cinétique en un point A : $\boxed{\vec{\sigma_A} = \vec{AM} \wedge \vec{p}}$
- L'énergie cinétique : $\boxed{E_C = \frac{1}{2}mv^2}$

Dans le cas des <u>référentiels galiléens</u>, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{f}}$ Soit la dérivée de la quantité de mouvement d'un point matériel par rapport au temps est égale à la somme des forces qu'il subit.

Dans le cas où la masse est constante on peut alors écrire $\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{f}}$

Dans le cas des <u>référentiels non galiléens</u> (référentiel R_2 qui n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel Galiléen R_1), le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

1. <u>Dans le cas d'une translation</u>

$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{f} + \vec{f_{ie}}}$ Avec $\vec{f_{ie}}$ la force d'inertie d'entraînement du point M due à l'accélération du référentiel R_2 par rapport au référentiel galiléen R_1.

2. <u>Dans le cas d'une rotation</u>

$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{f} + \vec{f_{ie}} + \vec{f_{ic}}}$ Avec

- ➢ $\vec{f_{ie}}$ la force d'inertie d'entraînement du point M due à l'accélération du référentiel R_2 par rapport au référentiel galiléen R_1
- ➢ $\vec{f_{ic}}$ la force d'inertie de Coriolis du point M.

Théorème du moment cinétique

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique du point matériel M en un point fixe O d'un référentiel galiléen est égale à la somme des moments en ce point des forces subies par M :

$\boxed{\frac{d\vec{\sigma_O}}{dt} = \sum \mathcal{M}_O(\vec{F})}$ Avec $\mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$ et $\vec{\sigma_O} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = m.\vec{OM} \wedge \vec{v}$

➢ Solide en rotation autour d'un axe fixe

Le moment cinétique du solide s'écrit : $\boxed{\sigma_{\Delta}(S) = J_{\Delta}.\omega}$ Avec $J_{\Delta} = \iint \rho^2 dm$

L'énergie cinétique du solide dans sa rotation autour de Δ s'écrit : $\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta}\omega^2}$

Le théorème du moment cinétique s'écrit donc : $\boxed{J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum \mathcal{M}_O(\vec{F})}$

Théorème de Huygens : $\boxed{J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + md^2}$

Le moment d'inertie d'un solide de masse m et de centre d'inertie G par rapport à un axe Δ est égal à la somme de son moment d'inertie par rapport à un axe Δ_G parallèle à Δ et passant par G, et de md^2 où d est la distance entre les deux axes Δ et Δ_G.

➢ Théorème d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de celui-ci une poussée verticale et dirigée vers le haut, égale au poids du volume de fluide déplacé.

Soit un volume V de fluide déplacé, de masse volumique r, la poussée d'Archimède d'écrit : $\boxed{\vec{\Pi} = -\rho.V\vec{g}}$