EXERCICES MATHS - TERM ES - CORRECTION

Exercice n°1 :

1. f définie et dérivable sur R car fonction polynomiale. Calculons sa dérivée : f'(x) = $\frac{3}{4}x^2 - 2x$

Etudions le signe de f'(x) en le factorisant : f'(x) = $x\left(\frac{3}{4}x - 2\right)$, on obtient le tableau de variation suivant :

	$-\infty$		0		8/3		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$\frac{3}{4}x - 2$		-		-	0	+	
f'(x)		**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{37}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) Equation de la tangente en A (x=2) : t(x) = -3x – 7

b) d(x) = f(x) – t(x) = $\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 1 - (-x+1) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x = \frac{1}{4}x(x^2 - 4x + 4) = \mathbf{\frac{1}{4}x(x-2)^2}$

(on pouvait aussi développer d(x), cela revient au même).

c) Pour étudier la position relative de (C) par rapport à (D) il suffit d'étudier le signe de la différence. Un carré étant toujours positif, le signe de d(x) correspond au signe de x : pour x < 0, (D) est au-dessus de (C) et pour x > 0, c'est le contraire !!!

Exercice n°2 : Soient (C) et (C') les courbes d'équations respectives $y = x^3 - 2x + 3$ et $y = 2x^2 - 3x + 3$.

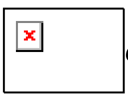
1. Coordonnées des points communs à (C) et (C') : $x^3 - 2x + 3 = 2x^2 - 3x + 3$
Soit : $x^3 - 2x^2 + x = 0$
$x(x^2 - 2x + 1) = 0$, identité remarquable : $\mathbf{x(x-1)^2 = 0}$
Il existe donc deux points communs : l'un pour x = 0 de coordonnées (0 ; 3) et le second pour x = 1, de coordonnées (1 ; 2)

2. Pour calculer les équations des tangentes, il faut tout d'abord les fonctions dérivées, puis appliquer les formules, on obtient :
En x = 0 : tangente à (C) y = -2x + 3 et tangente à (C') : y' = -3x + 3
En x = 1 : tangente à (C) : y'' = x + 1 et tangente à (C') : y''' = x + 1

3.

- Etude des variations de la fonction : $x \longmapsto x^3 - 2x + 3$:

f dérivable sur R. f'(x) = $3x^2 - 2$

$3x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{2}{3}$. Il existe donc deux solutions :  et $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

On obtient donc f croissante sur les intervalles $]-\infty ; x_2]$ et $[x_1 ; +\infty[$
et décroissante sur l'intervalle $]x_2 ; x_1[$

- Etude des variations de la fonction : $x \longmapsto 2x^2 - 3x + 3$:

f dérivable sur R. $f'(x) = 4x - 3$

$4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$.

On obtient donc f décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; \frac{3}{4}]$ et croissante sur l'intervalle $[\frac{3}{4} ; +\infty[$

Exercice n°3 :

1. a) soit $f(x) = \frac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3}$ on veut la mettre sous la forme $f(x) = ax + \frac{bx}{x^2 + 3}$: on met sous le même dénominateur : $f(x) = \frac{ax^3 + x(3a + b)}{x^2 + 3}$ par identification on trouve **a = -1 et b = 8**

(Il s'agit en fait d'un ***théorème*** *: deux polynômes sont égaux si et seulement si ils sont de même degré et si les coefficients des termes de même degré sont égaux).*

b) $f(-x) = -f(x)$ la fonction est donc bien impaire. Une fonction **impaire** a pour point de symétrie l'origine. Le point O(0;0) est donc un point de symétrie de la courbe (*C*).
(Rq : une fonction **paire** a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées).

2. Soit f ' la dérivée de f.

a) f' dérivable sur R (car $x^2+3 \neq 0$ quelque soit x de R) $f'(x) = \frac{(-3x^2 + 5)(x^2 + 3) - 2x(-x^3 + 5x)}{(x^2 + 3)^2}$

$$f'(x) = \frac{-3x^4 + 5x^2 - 9x^2 + 15 + 2x^4 - 10x^2}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-x^4 - 14x^2 + 15}{(x^2 + 3)^2}$$

Il faut poser $X = x^2$, calculer le déterminant, trouver les deux racines, ne pas oublier de mettre le – devant le produit (car a = -1) et on trouve : $f'(x) = \frac{(1 - x^2)(-x^2 - 15)}{(x^2 + 3)^2}$

b) Il faut étudier le signe de la dérivée pour voir les variations de f. Il existe en tout 4 racines distinctes qui sont : 1, -1, - et $+\sqrt{15}$. Le tableau de variation est le suivant :

	$-\infty$		$-\sqrt{15}$		-1		1		$+\sqrt{15}$		$+\infty$
$(1 - x^2)$		-	-	-	0	+	0	-	-	-	
		+	0	-	-	-	-	-	0	+	
f'(x)		**-**	**0**	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	**0**	**-**	
Variations de f		↘		↗		↘		↗		↘	

3. Equation à la courbe à l'origine (x = 0) : $f'(0) = -\frac{15}{9}$, f(0) = 0. La droite d'équation $y = -\frac{15}{9}x$ est donc une équation de la tangente à la courbe à l'origine.

4. Pour étudier la position relative de C et de D il faut étudier le signe de la différence :

$$f(x) - (-x) = \frac{-x^3 + 5x}{x^2+3} + x = \frac{-x^3 + 5x + x(x^2+3)}{x^2+3} = \frac{8x}{x^2+3}$$

Le signe de la différence est le même que celui de 8x étant donné que $x^2 + 3$ est strictement positif.
On a donc C au-dessus de D pour x < 0 et l'inverse pour x > 0.

b) On a $f(x) + x = \frac{8x}{x^2+3}$ On divise numérateur et dénominateur par x^2 :

$$f(x) + x = \frac{\frac{8x}{x^2}}{\frac{x^2+3}{x^2}} = \frac{\frac{8}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{x}\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{x^2}}\right)}$$

Etudions la limite : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3}{x^2}\right) = 1$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(1 + \frac{3}{x^2}\right) = +\infty$$

On obtient donc $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8}{x\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} = 0$

La différence des équations tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini : **la droite D d'équation y = -x est donc asymptote oblique à la courbe C.**

Exercice n°4 : Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

<u>Fonction f :</u>

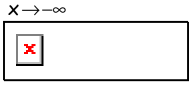
$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}} - 2}{e^{\frac{x}{4}}}$$

f définie et dérivable sur R, $f'(x) = \frac{\frac{3}{4}e^{\frac{x}{4}} \times e^{\frac{x}{4}} - \frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}\left(3e^{\frac{x}{4}} - 2\right)}{\left(e^{\frac{x}{4}}\right)^2} = \frac{1}{2e^{\frac{x}{4}}}$

f est donc strictement croissante sur R.

<u>Limites :</u>

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$



<u>Fonction g :</u>

$g(x) = -e^{-x}(e^{-x} - 10) + 12x$
g définie et dérivable sur R
$g'(x) = e^{-x}(e^{-x} - 8) + (-e^{-x})(-e^{-x}) + 8 =$ $\mathbf{2e^{-2x} - 10e^{-x} + 12}$
Factorisons g' pour étudier son signe : $2e^{-2x} - 10e^{-x} + 12 = 2(e^{-2x} - 5e^{-x} + 6) =$ $\mathbf{2(e^{-x} - 2)(e^{-x} - 3)}$
g' est nul pour $e^{-x} - 2 = 0$ soit $e^{-x} = 2$ soit $\mathbf{x = -\ln 2}$
ou pour $e^{-x} - 3 = 0$ soit $e^{-x} = 3$ soit $\mathbf{x = -\ln 3}$
Ainsi g' est du signe de a (a = 2), c'est-à-dire positif à l'extérieur des racines.
G est donc croissante sur $]-\infty ; -\ln 3]$ et sur $[-\ln 2 ; +\infty[$
Et décroissante sur l'intervalle $]-\ln 3 ; -\ln 2[$

Limites :

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ (exponentielles et 12x tendent tous les deux vers la même limite)
$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (les exp tendent vers 0, on obtient donc la limite de 12x)

Fonction h :

$h(x) = (x-1)\ln(x-1) + x$

h définie et dérivable pour tout $x - 1 > 0$ soit pour tout $\mathbf{x > 1}$
$h'(x) = \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} \times (x-1) + 1$ soit $h'(x) = \ln(x - 1) + 2$
Pour étudier le signe de la dérivée, on est obligé d'avoir un produit. La règle sur les ln et les exponentielles nous donne : $2 = \ln(e^2)$ soit $h'(x) = \ln(x - 1) + \ln(e^2)$
On applique les règles de somme sur les ln : on obtient $h'(x) = \ln[e^2(x - 1)]$
Désormais il est possible d'étudier le signe de la dérivée. Il ne faut pas oublier que $\ln x = 0$ pour $x = 1$.
Soit $e^2(x - 1)] = 1 \Rightarrow x-1 = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$ soit $\mathbf{x = 1 + e^{-2}}$
Ainsi la fonction h est décroissante sur $]1 ; 1+e^{-2}]$ et croissante sur $[1+e^{-2} ; +\infty[$

Limites :

$\lim_{x \to 1} h(x) = 1$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

FIN